Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, № 1 (2017), с. 31–38
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 1 (2017), pp. 31–38

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-1-31-38

УДК 517.9

Существование и устойчивость контрастных структур в многомерных задачах реакция-диффузия-адвекция в случае сбалансированной нелинейности

Давыдова М. А., Нефедов Н. Н.

получена 16 мая 2016

Аннотация. В настоящей работе рассматривается многомерная сингулярно возмущенная краевая задача для уравнения эллиптического типа, называемого в приложениях стационарным уравнением реакция-диффузия-адвекция. Формулируются основные условия существования решений с внутренними переходными слоями (контрастных структур) и строятся асимптотические приближения произвольного порядка точности таких решений. Применяется эффективный алгоритм определения положения поверхности перехода, позволяющий распространить наш подход на более сложный случай сбалансированных адвекции и реакции (так называемый критический случай). Для обоснования построений асимптотики используется и развивается на этот класс задач асимптотический метод дифференциальных неравенств, позволяющий также установить устойчивость по Ляпунову решений с внутренними переходными слоями как стационарных решений соответствующих параболических задач.

Ключевые слова: уравнения реакция-диффузия-адвекция, контрастные структуры

Для цитирования: Давыдова М. А., Нефедов Н. Н., "Существование и устойчивость контрастных структур в многомерных задачах реакция-диффузия-адвекция в случае сбалансированной нелинейности", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:1 (2017), 31–38.

Об авторах:
Давыдова Марина Александровна, orcid.org/0000-0002-9255-7353, канд. физ.-мат. наук, ст. научный сотрудник,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия,
e-mail: m.davydova@bk.ru

Нефедов Николай Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия,
e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Благодарности:
Работа выполнена при поддержке РФФИ, пр. №16-01-00437.

1. Постановка задачи. Основные условия существования контрастных структур

Рассмотрим сингулярно возмущенную задачу Дирихле

$$\varepsilon^2 \Delta u - f(\varepsilon \nabla u, u, x) = 0, \quad x = (x_1, ..., x_N) \in D \subset R^N, \tag{1}$$

$$u(x, \varepsilon) = g(x), \quad x \in \partial D, \tag{2}$$

предполагая, что $\varepsilon > 0$ – малый параметр, функции f , $g(x)$ и граница ∂D – достаточно гладкие, f удовлетворяет условию не более чем квадратичного роста по ∇u . Под обозначением $\varepsilon \nabla u$ будем подразумевать зависимость функции f от аргументов $v_1 \equiv \varepsilon \partial u/\partial x_1$,$v_2 \equiv \varepsilon \partial u/\partial x_2$, ...,$v_N \equiv \varepsilon \partial u/\partial x_N$, $\Delta = \sum\limits_{k=1}^{N} \partial^2/\partial x_k^2$ – оператор Лапласа.

При исследовании задачи (1), (2) на наличие решений с внутренними переходными слоями основным требованием является условие

(У$_1$) Вырожденное уравнение $f(0, u, x) = 0$ имеет ровно три корня $u = \phi_i(x)$, $i = \overline{1, 3}$, причем $\phi_1(x) < \phi_2(x) < \phi_3(x)$, $f_u(0, \phi_i(x), x) > 0$, $i = 1, 3$, $f_u(0, \phi_2(x), x) < 0$ при $x \in \bar{D}$.

По аналогии с работой [2] определим множество $\{\bar{\Omega}\}$ достаточно гладких замкнутых поверхностей в области D с локальными координатами в δ – окрестности $\bar{\Omega}_\delta$ каждой поверхности

$$x \in \bar{\Omega}^\delta \mapsto (y, r) \in \bar{\Omega} \times [-\delta; \delta].$$

Здесь $y \in \bar{\Omega}$, причем $dist(x, \bar{\Omega}) = dist(x, y)$; $r = \begin{cases} dist(x, y), & x \in D^+, \\ -dist(x, y), & x \in D^-, \end{cases}$
D^+ и D^- – соответственно внешняя и внутренняя подобласти области D, разделенные поверхностью $\bar{\Omega}$. Пусть $\mathbf{n}(y, \bar{\Omega})$ – единичная внешняя нормаль к $\bar{\Omega}$ в точке y. Тогда взаимно однозначное соответствие между координатами дается выражениями

$$x_i = y_i(\theta_1, ..., \theta_{N-1}) + r n_i(\theta_1, ..., \theta_{N-1}, \bar{\Omega}), \quad i = \overline{1, N}, \tag{3}$$

где $\{\theta_1, ..., \theta_{N-1}\}$ – криволинейные координаты на поверхности $\bar{\Omega}$, $n_i(\theta_1, ..., \theta_{N-1}, \bar{\Omega})$ – направляющие косинусы нормали, причем

$$\partial u/\partial x_i = l^i(r, \theta) \partial u/\partial r + \sum_{j=1}^{N-1} q_j^i(r, \theta) \partial u/\partial \theta_j, \quad i = \overline{1, N}, \tag{4}$$

где $l^i(r, \theta)$, $q_j^i(r, \theta)$ – известные функции, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{N-1}) \in \bar{\Theta}$, $\bar{\Theta}$ – область изменения координаты θ на поверхности $\bar{\Omega}$.

При описании контрастных структур в задаче (1), (2) существенную роль играет присоединенная система уравнений

$$\partial \tilde{v}/\partial \xi = f(l^1(r, \theta)\tilde{v}, .., l^N(r, \theta)\tilde{v}, \tilde{u}, r, \theta), \quad \partial \tilde{u}/\partial \xi = \tilde{v}, \quad -\infty < \xi < +\infty, \tag{5}$$

где r и θ рассматриваются как параметры. Для каждой поверхности из множества $\{\bar{\Omega}\}$ определим функцию $H(r, \theta) \equiv \tilde{v}^+(0, r, \theta) - \tilde{v}^-(0, r, \theta)$, $\quad (r, \theta) \in [-\delta; \delta] \times \bar{\Theta}$, где $\tilde{v}^\pm(\xi, r, \theta)$ – решения системы (5) с условиями

$$\tilde{u}^\mp(\mp\infty, r, \theta) = \phi_i(r, \theta), \quad i = 1, 3, \quad \tilde{v}^\mp(\mp\infty, r, \theta) = 0. \tag{6}$$

Пусть выполнено условие

(У$_2$) Функция $H(r,\theta)=0$ при $(r,\theta)\in[-\delta;\delta]\times\bar{\Theta}$ для любой поверхности из множества $\{\bar{\Omega}\}$.

Условие (У$_2$) означает, что для любой поверхности из указанного множества на фазовой плоскости $(\tilde{u},\tilde{v})$ системы (5) существует сепаратриса, соединяющая седла $(\phi_1(r,\theta),0)$ и $(\phi_3(r,\theta),0)$ при $\theta\in\bar{\Theta}$. Это требование выделяет критический случай. В некритическом случае функция $H(r,\theta)$ обращается в ноль на одной или нескольких поверхностях из множества $\{\bar{\Omega}\}$ [2].

Формальное асимптотическое разложение решения $u(x,\varepsilon)$ типа контрастной структуры по степеням ε получается в результате C^1-сшивания двух асимптотик погранслойного типа

$$\begin{aligned} &u^-(x,\varepsilon)=\bar{u}^-(x,\varepsilon)+Qu^-(\xi,\lambda^*,\theta,\varepsilon),\\ &u^+(x,\varepsilon)=\bar{u}^+(x,\varepsilon)+\Pi u(\rho,\eta,\varepsilon)+Qu^+(\xi,\lambda^*,\theta,\varepsilon)\end{aligned}\tag{7}$$

на поверхности перехода Ω.

Здесь $\bar{u}^-(x,\varepsilon)=\phi_1(x)+\varepsilon\bar{u}_1^{\pm}(x)+...$, $\bar{u}^+(x,\varepsilon)=\phi_3(x)+\varepsilon\bar{u}_1^{\pm}(x)+...$ – регулярные ряды, $\Pi u(\rho,\eta,\varepsilon)=\Pi_0u(\rho,\eta)+\varepsilon\Pi_1u(\rho,\eta)+...$ – пограничный ряд, описывающий пограничный слой в окрестности границы ∂D, $\rho=\bar{r}/\varepsilon$, $(\bar{r},\eta)$ – локальные координаты в окрестности границы ∂D, $Qu^{\pm}(\xi,\lambda^*,\theta,\varepsilon)=Q_0u^{\pm}(\xi,\lambda^*,\theta)+\varepsilon Q_1u^{\pm}(\xi,\lambda^*,\theta)+...$ – ряды, описывающие пограничные слои, локализованные в окрестности поверхности Ω, соответственно вне и внутри поверхности.

Положение поверхности перехода определим условием

$$u(x,\varepsilon)=\phi_2(x),\quad x\in\Omega,$$

а уравнение поверхности Ω найдем в виде асимптотического разложения по степеням ε

$$r=\lambda^*(\theta,\varepsilon)=\varepsilon(\lambda_1(\theta)+\varepsilon\lambda_2(\theta)+...),\tag{8}$$

где в качестве главного члена фигурирует уравнение поверхности Ω_0, критерий выбора которой будет сформулирован ниже.

Здесь (r,θ) – локальные координаты, определяемые в окрестности поверхности Ω_0 в соответствии с (3).

Построение асимптотических разложений погранслойного типа (7), где $\xi=\varepsilon^{-1}(r-\lambda^*(\theta,\varepsilon))$, выполняется в соответствии с методом пограничных функций [3], развитым на случай многомерных задач в работе [4].

Коэффициенты $\lambda_i(\theta)$ разложения (8) определяются из условия C^1-сшивания асимптотик (7) на поверхности Ω:

$$\begin{aligned}&\varepsilon\left(\partial u^+(\lambda^*(\theta,\varepsilon),\theta,\varepsilon)/\partial r-\partial u^-(\lambda^*(\theta,\varepsilon),\theta,\varepsilon)/\partial r\right)=H(\lambda^*(\theta,\varepsilon),\theta)+\\ &+\varepsilon\left({\phi'}_3(\lambda^*(\theta,\varepsilon),\theta)-{\phi'}_1(\lambda^*(\theta,\varepsilon),\theta)+\partial Q_1u^+(0,\lambda^*,\theta)/\partial\xi-\partial Q_1u^-(0,\lambda^*,\theta)/\partial\xi\right)+...\equiv\\ &\equiv H(\lambda^*(\theta,\varepsilon),\theta)+\varepsilon G_1(\lambda^*(\theta,\varepsilon),\theta)+\varepsilon^2G_2(\lambda^*(\theta,\varepsilon),\theta)+...=0.\end{aligned}\tag{9}$$

Учитывая условие (У$_2$), явный вид функций $Q_k^{\pm}u(r,\theta,\lambda^*),\quad k\geq 1$ и разложение (8), представляем каждое слагаемое в уравнении (9), начиная со второго, в виде разложения по степеням ε . В результате приходим к уравнению:

$$\varepsilon G_1(0,\theta)+\varepsilon^2\left(M(\theta)\lambda_1(\theta)-\Phi_1(\theta)\right)+...=0,\tag{10}$$

где линейный оператор $M(\theta)$ будет определен ниже, $\Phi_1(\theta)$ – известная функция.

Уравнение (10) выполняется в первом приближении при условии, определяющем положение поверхности перехода в нулевом приближении:

(У$_3$) Существует поверхность $\Omega_0 \subset \{\bar{\Omega}\}$ такая, что функция

$$G_1(0,\theta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} \tilde{f}_{v_k}(\xi,\theta) \frac{\partial l^k}{\partial r}(0,\theta) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \tilde{f}_r(\xi,\theta) \right) p(\xi,\theta)\tilde{v}(\xi,\theta)\xi d\xi +$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(\xi,\theta)\tilde{v}(\xi,\theta) \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{f}_{v_k}(\xi,\theta) q_j^k(0,\theta) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta_j} d\xi - k(0,\theta) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(\xi,\theta)\tilde{v}^2(\xi,\theta)d\xi = 0, \tag{11}$$

при $\theta \in \Theta_0$, где Θ_0 – область изменения координаты θ на поверхности Ω_0.

Здесь $k(0,\theta) = \sum\limits_{j=1}^{N-1} k_j(0,\theta)$ – сумма главных кривизн поверхности Ω_0 в точке с координатой θ; $\tilde{u}(\xi,\theta)$, $\tilde{v}(\xi,\theta)$ – решение системы (5), (6) при $r = 0$, $\theta \in \Theta_0$, которое описывает внутренний слой контрастной структуры в нулевом приближении; $\tilde{f}(\xi,\theta) \equiv f\left(l^1(0,\theta)\tilde{v}, ..., l^N(0,\theta)\tilde{v}, \tilde{u}, 0, \theta\right)$, $p(\xi,\theta) = \exp\left(-\int\limits_0^{\xi} \sum\limits_{k=1}^{N} \tilde{f}_{v_k}(\eta,\theta) l^k(0,\theta) d\eta \right)$.

В частности, пусть $\Omega_0 \subset D \subset R^2$ – простая замкнутая кривая, которая относительно некоторой полярной системы координат (R,θ) с полюсом внутри области D описывается уравнением вида $R = \sigma(\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Тогда уравнение (11) в совокупности с условием периодичности $\sigma(\theta) = \sigma(\theta+2\pi)$ представляет собой нелинейную задачу для ОДУ 2-го порядка [5], разрешимую в силу условия (У$_3$).

Периодические функции $\lambda_n(\theta)$, $n \ge 1$ определяются с использованием $n+1$ - го приближения уравнения (10) из линейных дифференциальных задач для уравнений

$$M(\theta)\lambda_n(\theta) - \Phi_n(\theta) = 0, \quad \theta \in \Theta_0. \tag{12}$$

Здесь $\Phi_n(\theta)$ – известные функции, оператор $M(\theta)$ имеет вид

$$M(\theta) = -\tilde{v}^{-1}(0,\theta) \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^2(\eta,\theta)p(\eta,\theta)d\eta \sum_{j=1}^{N-1} m_j(0,\theta)\partial^2/\partial{\theta_j}^2 + \right.$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N-1} q_j^k(0,\theta) \left[\frac{\partial \phi_3}{\partial r}(0,\theta) \int\limits_0^{+\infty} \tilde{f}_{v_k}(\eta,\theta)\tilde{v}(\eta,\theta)p(\eta,\theta)d\eta + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \phi_1}{\partial r}(0,\theta) \int\limits_{-\infty}^{0} \tilde{f}_{v_k}(\eta,\theta)\tilde{v}(\eta,\theta)p(\eta,\theta)d\eta \right] \frac{\partial}{\partial \theta_j} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N-1} \left[2m_j(0,\theta) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \partial\tilde{v}/\partial\theta_j \tilde{v}(\eta,\theta)p(\eta,\theta)d\eta + \right.$$
$$\left. + \bar{n}_j(0,\theta) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^2(\eta,\theta)p(\eta,\theta)d\eta \right] \frac{\partial}{\partial \theta_j} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial r}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{v}(\eta,r,\theta)\bar{p}(\eta,r,\theta)\left(\sum_{k=1}^{N}\tilde{f}_{v_k}(\eta,\theta)\frac{\partial l^k}{\partial r}(r,\theta)\tilde{v}(\eta,r,\theta)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\tilde{f}_r(\eta,\theta)\right)\eta d\eta+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{v}(\eta,r,\theta)\bar{p}(\eta,r,\theta)\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N-1}\tilde{f}_{v_k}(\eta,\theta)q_j^k(r,\theta)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\theta_j}(\eta,r,\theta)d\eta\right]\Bigg|_{r=0}+$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{N-1}k_j^2(0,\theta)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{v}^2(\eta,\theta)p(\eta,\theta)d\eta-k(0,\theta)\frac{\partial}{\partial r}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{v}^2(\eta,r,\theta)\bar{p}(\eta,r,\theta)d\eta\Bigg|_{r=0}\right\},$$

где $\tilde{u}(\xi,r,\theta)$, $\tilde{v}(\xi,r,\theta)$ – решение системы (5), (6),$m_j(0,\theta)$, $\bar{n}_j(0,\theta)$ – известные функции $\bar{p}(\xi,r,\theta)=\exp\left(-\int\limits_0^\xi\sum\limits_{k=1}^{N}\tilde{f}_{v_k}(\eta,\theta)l^k(r,\theta)d\eta\right)$.

Условие, обеспечивающее разрешимость периодических задач для уравнений (12), формулируется следующим образом

(У$_4$) Оператор $M(\theta)$ положительно обратим при $\theta\in\Theta_0$ на множестве положительных Θ_0 – периодических правых частей.

Существование решений типа контрастных структур и их устойчивость по Ляпунову, как решений соответствующих параболических задач, доказываются с использованием асимптотического метода дифференциальных неравенств, причем верхнее и нижнее решения задачи (1), (2) получаются путем стандартных модификаций частичных сумм n-го порядка асимптотических разложений (7) (см., например, [1, 3]). Доказана оценка остаточного члена

$$\left|u(x,\varepsilon)-U_n^{\pm}(x,\varepsilon)\right|\le C\varepsilon^{n+1},$$

где

$$\begin{aligned}
&U_n^-(x,\varepsilon)=\phi_1(x)+\varepsilon\bar{u}_1^-(x)+Q_0u^-(\xi,\theta)+\varepsilon Q_1u^-(\xi,\theta)+\\
&+...+\varepsilon^{n-1}\bar{u}_{n-1}^-(x)+\varepsilon^n\bar{u}_n^-(x)+\varepsilon^{n-1}Q_{n-1}u^-(\xi,\theta)+\varepsilon^nQ_nu^-(\xi,\theta),\\
&U_n^+(x,\varepsilon)=\phi_3(x)+\varepsilon\bar{u}_1^+(x)+Q_0u^+(\xi,\theta)+\varepsilon Q_1u^+(\xi,\theta)+\Pi_0u(\rho,\eta)+\\
&+\varepsilon\Pi_1u(\rho,\eta)+...+\varepsilon^{n-1}\bar{u}_{n-1}^+(x)+\varepsilon^n\bar{u}_n^+(x)+\varepsilon^{n-1}Q_{n-1}u^+(\xi,\theta)+\varepsilon^nQ_nu^{\pm}(\xi,\theta)+\\
&+\varepsilon^{n-1}\Pi_{n-1}u(\rho,\eta)+\varepsilon^n\Pi_nu(\rho,\eta),\quad \xi=\varepsilon^{-1}(r-\sum_{k=1}^{n+1}\varepsilon^k\lambda_k(\theta)),
\end{aligned}$$

$x\in\bar{D}$, $\quad C>0$ и не зависит от ε.

2. Пример

Рассмотрим задачу (1), (2) при условии (У$_1$) и $D\subset R^2$. Пусть кривая Ω_0, в ε-окрестности которой локализован внутренний слой, относительно некоторой полярной системы координат с полюсом внутри области D описывается уравнениями: $x_1=R\cos\theta$, $\quad x_2=R\sin\theta$, $\quad 0\le\theta\le2\pi$, $R=const$. Определим локальные координаты в окрестности этой кривой: $x\in\Omega_0^\delta\mapsto(r,\theta)\in[-\delta;\delta]\times[0,2\pi]$. Они связаны с декартовыми посредством соотношений $x_1=(R+r)\cos\theta$, $\quad x_2=(R+r)\sin\theta$.

В системе координат (r,θ) производные $\partial u/\partial x_i$, $i = 1,2$, вычисляются следующим образом: $\partial u/\partial x_1 = \cos\theta\partial u/\partial r - \sin\theta(R+r)^{-1}\partial u/\partial\theta$, $\partial u/\partial x_2 = \sin\theta\partial u/\partial r + \cos\theta(R+r)^{-1}\partial u/\partial\theta$. Пусть реализуется критический случай, т.е. выполнено условие (У$_2$), где $\tilde{v}^{\pm}(\xi,r,\theta)$ – решения системы уравнений

$$\frac{\partial\tilde{v}^{\pm}}{\partial\xi} = (A_1(\tilde{u}^{\pm},r,\theta)\cos\theta + A_2(\tilde{u}^{\pm},r,\theta)\sin\theta)\tilde{v}^{\pm} + B(\tilde{u}^{\pm},r,\theta), \quad \frac{\partial\tilde{u}^{\pm}}{\partial\xi} = \tilde{v}^{\pm} \tag{13}$$

с дополнительными условиями (6). Множество точек, в которых выполняется уравнение (11), составляет кривую Ω_0 . С учетом этого приходим к уравнению относительно R:

$$R\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{v}(\xi,\theta)p(\xi,\theta)\left[\left(\frac{\partial A_1}{\partial r}(\tilde{u},0,\theta)\cos\theta + \frac{\partial A_2}{\partial r}(\tilde{u},0,\theta)\sin\theta\right)\tilde{v} + \frac{\partial B}{\partial r}(\tilde{u},0,\theta)\right]\xi d\xi +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{v}(\xi,\theta)p(\xi,\theta)\left(A_2(\tilde{u},0,\theta)\cos\theta - A_1(\tilde{u},0,\theta)\sin\theta\right)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\theta}d\xi - \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\tilde{v}(\xi,\theta)\right)^2 p(\xi,\theta)d\xi = 0,$$

где $\tilde{u}(\xi,\theta)$, $\tilde{v}\ (\xi,\theta)$ – решения системы (13) при $r = 0$ с дополнительными условиями $\tilde{u}^{\pm}(0,\theta) = \phi_2(0,\theta)$, $\tilde{u}^{-}(-\infty,\theta) = \phi_1(0,\theta)$, $\tilde{u}^{+}(+\infty,\theta) = \phi_3(0,\theta)$, $p(\xi,\theta) = \exp\left(-\cos\theta\int\limits_0^{\xi}A_1(\tilde{u},0,\theta)d\eta - \sin\theta\int\limits_0^{\xi}A_2(\tilde{u},0,\theta)d\eta\right)$.

В следующих приближениях относительно членов асимптотики, описывающих внутренний слой, получаем линейные краевые задачи для уравнений следующего вида $(n \geq 1)$: $N(\xi,\theta)Q_n u^{\pm} = H_n^{\pm}(\xi,\theta)$, где $N(\xi,\theta) = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - (A_1(\tilde{u},0,\theta)\cos\theta + A_2(\tilde{u},0,\theta)\sin\theta)\frac{\partial}{\partial\xi} - \left(\frac{\partial A_1}{\partial u}(\tilde{u},0,\theta)\cos\theta + \frac{\partial A_2}{\partial u}(\tilde{u},0,\theta)\sin\theta\right)\frac{\partial\tilde{u}^{\pm}}{\partial\xi} - \frac{\partial B}{\partial u}(\tilde{u},0,\theta)$, $H_n^{\pm}(\xi,\theta)$ – известные функции.

Коэффициенты разложения (8) находятся из линейных задач для уравнения типа (12), где

$$M(\theta) = -\tilde{v}^{-1}(0,\theta)\left\{R^{-2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{v}^2(\eta,\theta)p(\eta,\theta)d\eta\,\partial^2/\partial\theta^2 +\right.$$

$$+\left[R^{-1}\frac{\partial\phi_3}{\partial r}(0,\theta)\int\limits_0^{+\infty}(A_2(\tilde{u},0,\theta)\cos\theta - A_1(\tilde{u},0,\theta)\sin\theta)\tilde{v}(\eta,\theta)p(\eta,\theta)d\eta +\right.$$

$$+R^{-1}\frac{\partial\phi_1}{\partial r}(0,\theta)\int\limits_{-\infty}^{0}(A_2(\tilde{u},0,\theta)\cos\theta - A_1(\tilde{u},0,\theta)\sin\theta)\tilde{v}(\eta,\theta)p(\eta,\theta)d\eta +$$

$$\left.+2R^{-2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\partial\tilde{v}/\partial\theta\,\tilde{v}(\eta,\theta)p(\eta,\theta)d\eta\right]\partial/\partial\theta + \frac{\partial}{\partial r}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\left(\frac{\partial A_1}{\partial r}(\tilde{u},r,\theta)\ \cos\theta +\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\ \frac{\partial A_2}{\partial r}(\tilde{u},r,\theta)\sin\theta\right)\tilde{v}(\eta,r,\theta) + \frac{\partial B}{\partial r}(\tilde{u},r,\theta)\right)\tilde{v}(\eta,r,\theta)\overline{p}(\eta,r,\theta)\eta d\eta\right]\Bigg|_{r=0} +$$

$$+ R^{-1}\frac{\partial}{\partial r}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{v}(\eta,r,\theta)\overline{p}(\eta,r,\theta)\left(A_2(\tilde{u},r,\theta)\cos\theta - A_1(\tilde{u},r,\theta)\sin\theta\right)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\theta}(\eta,r,\theta)d\eta -\right.$$

$$\left.\left. - \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{v}^2(\eta,r,\theta)\overline{p}(\eta,r,\theta)d\eta\right]\right|_{r=0} + R^{-2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{v}^2(\eta,\theta)p(\eta,\theta)d\eta -$$

$$\left. -R^{-2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{v}(\eta,\theta)p(\eta,\theta)\left(A_2(\tilde{u},0,\theta)\cos\theta - A_1(\tilde{u},0,\theta)\sin\theta\right)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\theta}d\eta\right\}.$$

Условие разрешимости этих задач установлено в ($У_4$).

Список литературы / References

[1] Нефедов Н. Н., “Метод дифференциальных неравенств для нелинейных сингулярно возмущенных задач с контрастными структурами типа ступеньки в критическом случае”, *Дифференц. уравнения*, **32**:11 (1996), 1529–1537; Eglish transl.: Nefedov N. N., “The method of differential inequalities for nonlinear singularly perturbed problems with contrast structures of step type in the critical case”, *Differ. Equ.*, **32**:11 (1996), 1526–1534.

[2] Нефедов Н. Н., Давыдова М. А., “Контрастные структуры в многомерных сингулярно возмущенных задачах реакция-диффузия-адвекция”, *Дифференц. уравнения*, **48**:5 (2012), 738–748; Eglish transl.: Nefedov N. N., Davydova M. A., “Contrast structures in multidimensional singularly perturbed reaction-diffusion-advection problems”, *Differ. Equ.*, **48**:5 (2012), 745-755.

[3] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., “Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями”, *Тр. МИАН*, **268** (2010), 268–283; Eglish transl.: Vasil’eva A.B., Butuzov V.F., Nefedov N.N., “Singularly perturbed problems with boundary and internal layers”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **268** (2010), 258–273.

[4] Davydova M. A., “Existence and stability of solutions with boundary layers in multidimensional singularly perturbed reaction-diffusion-advection problems”, *Math. Notes*, **98**:6 (2015), 909–919.

[5] Нефедов Н. Н., Давыдова М. А., “Контрастные структуры в сингулярно возмущенных квазилинейных уравнениях реакция-диффузия-адвекция”, *Дифференц. уравнения*, **49**:6 (2013), 715–733; Eglish transl.: Nefedov N. N., Davydova M. A., “Contrast structures in singularly perturbed quasilinear reaction-diffusion-advection equations”, *Differ. Equ.*, **49**:6 (2013), 688–706.

Davydova M. A., Nefedov N. N., "Existence and Stability of the Solutions with Internal Layers in Multidimensional Problems of the Reaction-Diffusion-Advection Type with Balanced Nonlinearity.", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:1 (2017), 31–38.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-1-31-38

Abstract. In the present paper, we consider a multidimensional singularly perturbed problem for an elliptic equation referred to as the stationary reaction-diffusion-advection equation in applications. We formulate basic conditions of the existence of solutions with internal transition layers (contrust structures), and we construct an asymptotic approximation of an arbitrary-order accuracy to such solutions. We use a more efficient method for localizing the transition surface, which permits one to develop our approach to a more complicated case of balanced advection and reaction (the so-called critical case). To justify the constructed asymptotics, we use and develop, to this class of problems, an asymptotic method of differential inequalities, which also permits one to prove the Lyapunov stability of such solutions, as stationary solutions of the corresponding parabolic problems.

Keywords: problems of the reaction-diffusion-advection type, solutions with internal layers, contrust structures

On the authors:
Marina A. Davydova, orcid.org/0000-0002-9255-7353, PhD,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
1, bld. 2 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia,
e-mail: m.davydova@bk.ru

Nikolay N. Nefedov, Professor,
Lomonosov Moscow State University,
1, bld. 2 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia,
e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Acknowledgments:
This work was supported by RFBR, project No 16-01-00437.